第4章 不定积分

- 不定积分的概念与性质
- 换元积分法
- 分部积分法
- 有理函数和可化为有理函数的积分

4.1 不定积分的概念和性质

4.1.1 原函数的概念

4.1.2 不定积分的概念

4.1.3 基本积分表

4.1.4 不定积分的基本运算法则

4.1.1 原函数的概念

定义4.1.1. 若在区间I上, 可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$,
即对任意的$x\in I$,都有 $F'(x)=f(x)$或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$,
则称 $F(x)$ 为$f(x)$在区间 I 上的**一个**原函数 .

$(\sin x)'=\cos x$, 故$\sin x$是$\cos x$的一个原函数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}(x>0),\qquad (\ln x+9)'=\frac{1}{x}(x>0)$$

问题: 1. 在什么条件下, 一个函数的原函数存在?
2. 若原函数存在, 原函数的结构如何?
3. 若原函数存在, 应如何求原函数?

定理1（原函数的存在定理） 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数.（下章证明）

初等函数在定义区间上连续 $\Longrightarrow$ 初等函数在定义区间上有原函数

定理2（原函数的性质） 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

(1) $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，其中 C 为任意常数(constant).

(2) $f(x)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数.

证: $\because (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

$\therefore F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数.

定理2（原函数的性质） 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,

（2）$f(x)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数.

（2）设 $F(x)$ 和 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任意两个原函数，即

$$F'(x) = f(x) \quad \Phi'(x) = f(x)$$

$$\therefore \quad [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

故 $\Phi(x) - F(x) = C_0$ （C_0 为某个常数）

即 $\Phi(x) = F(x) + C_0$ 属于函数族 $F(x) + C$.

由（1），（2）： $f(x)$ 的所有原函数都在函数族

$F(x) + C$ 内, 其中C 为任意常数.

4.1.2 不定积分的概念

定义4.1.2 在区间I上,函数$f(x)$带有任意常数项的原函数称为$f(x)$（或$f(x)dx$）在I上的不定积分,

记作:$\int f(x)\mathrm{d}x$

其中 $\int$ — 积分号　　$f(x)$ — 被积函数

x — 积分变量　　$f(x)\mathrm{d}x$ — 被积表达式

若 $F'(x)=f(x)$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C \quad (C\text{为任意常数})$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

C称为积分常数不可丢 !

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C, \mu \neq -1$$是常数

例1 求 $\int \frac{1}{x}dx$

解 当$x > 0$时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

故在$(0,+\infty)$内，$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

当$x < 0$时，$[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$,

故在$(-\infty,0)$内，$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$

综合起来有， $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, x \neq 0$

例2 设曲线通过点(1, 2)，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的2倍，求此曲线的方程.

解 $\because \quad y' = 2x$

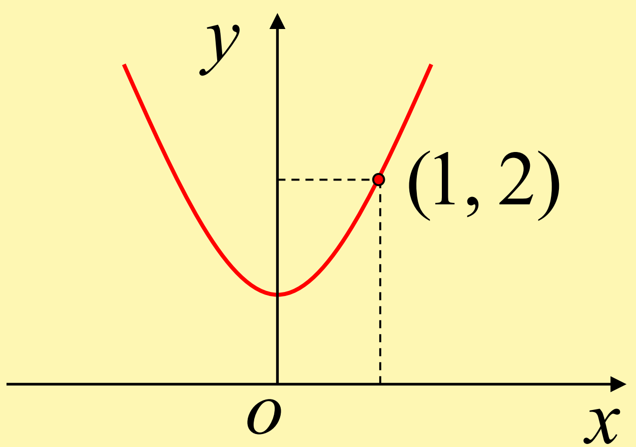
$$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

所求曲线过点(1 , 2)，故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore \quad C = 1$$

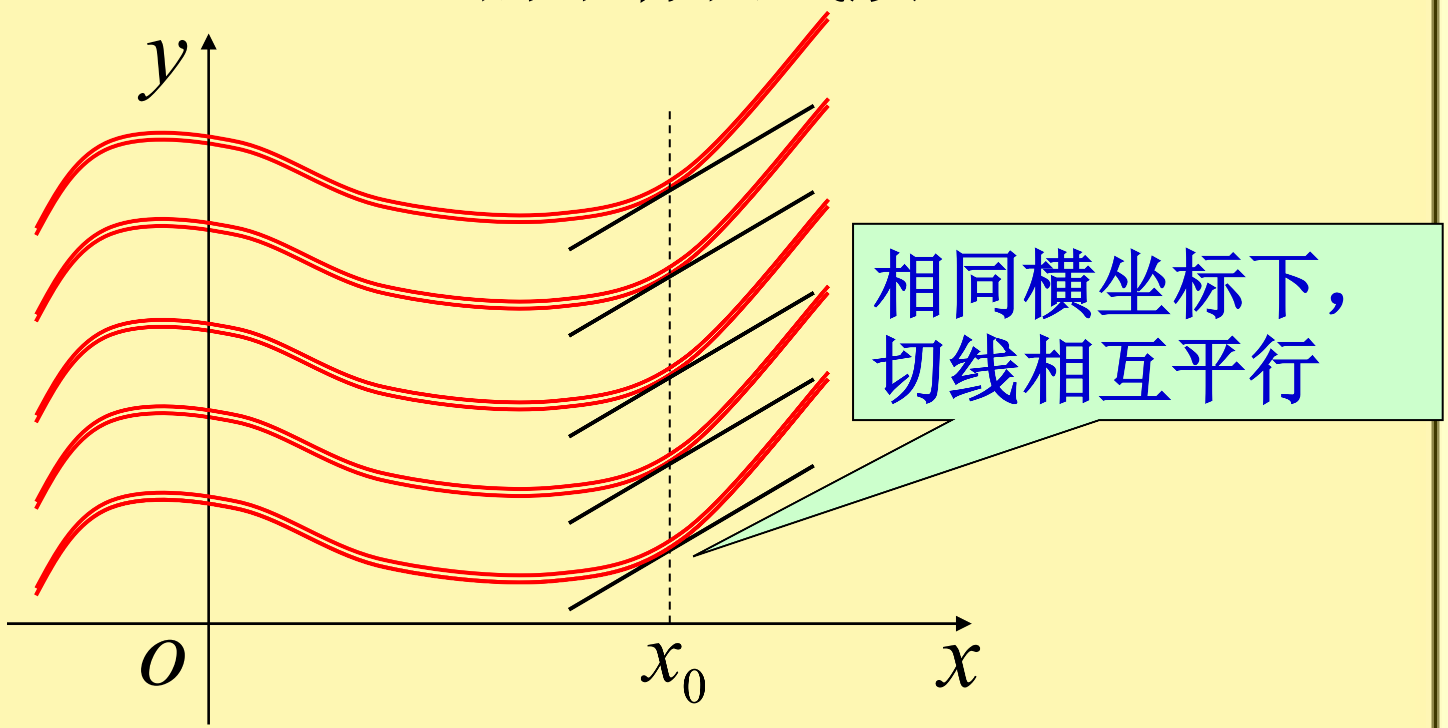
因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$



1. 不定积分的几何意义：

$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的**积分曲线**．

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$的所有积分曲线组成的平行曲线族.



2. 微分与积分之间的关系:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

3. 四个等价说法

(1) $f(x)$是$F(x)$的导函数；(2) $F(x)$是$f(x)$的原函数；

(3) $F'(x)=f(x)$; (4) $\int f(x)dx=F(x)+C$.

例3 设 $\arctan x$是$f(x)$的一个原函数,求

$$f(x), \int f(x)dx, \int f'(x)dx.$$

解 因为 $\arctan x$是$f(x)$的一个原函数,故

$$f(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

从而, $\int f(x)dx = \arctan x + C$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C = \frac{1}{1+x^2} + C.$$

4.1.3 基本积分表（一）

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ $(k$ 为常数$)$

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

注 同一个函数的不定积分，可以通过不同的形式表达，但经过恒等变形可以相互转化.

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

(13) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

(14) $\int \operatorname{sh} x \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

(15) $\int \operatorname{ch} x \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$

注 基本积分表的重要性:

是求不定积分的依据;

是学好高数后续内容(定积分、重积分、线积分、面积分、微分方程)的基础.

4.1.4 不定积分的基本运算法则

定理4.1.1 设 $f(x)$, $g(x)$的原函数存在, k, l是常数,则

$$\int [kf(x)+lg(x)]dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx.$$

例4 求 $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int x^{-\frac{1}{2}}(x^2-4x+4)\mathrm{d}x=\int (x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+4\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}+C$$

例5 求 $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int \frac{(1+x^2)+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+2\arctan x+C$$

例6 求 $\int (2^x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int 2^x\mathrm{d}x+\int \tan^2 x dx$

$$=\int 2^x\mathrm{d}x+\int (\sec^2 x-1)dx=\int 2^x\mathrm{d}x+\int \sec^2 x dx-\int 1 dx$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\tan x-x+C$$

例7. 求 (1) $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 原式 $= \int \frac{4}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 4\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -4\cot x + C$

(2) 原式 $= \int \frac{4}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int 4\csc^2 2x\,\mathrm{d}x = -2\cot 2x + C$

或：原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$= \tan x - \cot x + C$

$\tan x - \cot x = -2\cot 2x$

例 .设$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$,求$f(x)$.

解：设$\ln x=t$，则$x=e^t$，原式变形为$f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^t, & t>0\end{cases}$

当$t\le 0$时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int dt=t+C_1$

当$t>0$时，$f(t)=\int f'(t)dt=\int e^t dt=e^t+C_2$

所以 $f(t)=\begin{cases}t+C_1 & t\le 0\\ e^t+C_2 & t>0\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}x+C_1 & x\le 0\\ e^x+C_2 & x>0\end{cases}$ ✗ $f(x)$未必可导！

例 .设$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}$,求$f(x)$.

解：设$\ln x=t$，则$x=e^t$，原式变形为$f'(t)=\begin{cases}1, & t\le 0\\ e^t, & t>0\end{cases}$

当$t\le 0$时， $f(t)=\int f'(t)dt=\int dt=t+C_1$

当$t>0$时， $f(t)=\int f'(t)dt=\int e^t dt=e^t+C_2$

由于$f'(t)$处处存在，故$f(t)$处处连续，于是有

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=\lim_{t\to 0^-}(t+C_1)=C_1$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{t\to 0^+}(e^t+C_2)=1+C_2$$

由此可得 $C_1=1+C_2$, 令C_2=C

所以$f(t)=\begin{cases}t+1+C, & t\le 0\\ e^t+C, & t>0\end{cases}$ 即$f(x)=\begin{cases}x+1+C, & x\le 0\\ e^x+C, & x>0\end{cases}$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 不定积分的性质
- 基本积分表

2. 直接积分法:

利用恒等变形, 积分性质 及基本积分公式进行积分.

常用恒等变形方法 $\begin{cases} \text{分项积分} \\ \text{加项减项} \\ \text{利用三角公式, 代数公式 }, \cdots \end{cases}$